Departament d'Economia Aplicada

Crecimiento economico y estructura productiva en un modelo Input-Output: Un analisis alternativo de sensibilidad de los coeficientes.

Vicent Alcántara

D
O
C
U
M
E
N
T

D
E

T
R
E
B
A
L
L

11.08

Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat d'Economia i Emp

Aquest document pertany al Departament d'Economia Aplicada.

Data de publicació : **Juny 2011**

Departament d'Economia Aplicada
Edifici B
Campus de Bellaterra
08193 Bellaterra

Telèfon: (93) 581 1680
Fax:(93) 581 2292
E-mail: d.econ.aplicada@uab.es
http://www.ecap.uab.es

Crecimiento económico y estructura productiva en un modelo Input-Output: Un análisis alternativo de sensibilidad de los coeficientes.

Vicent Alcántara

Department of Applied Economics, Univ. Autónoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain
E-mail: vicent.alcantara@uab.es

Resumen

A partir de la relación que existe entre el valor propio de la matriz de coeficientes técnicos y la tasa de crecimiento en un modelo simple de Leontief, se propone una medida de la sensibilidad de los coeficientes de dicha matriz. Ello permite determinar la importancia del impacto de los cambios en los distintos coeficientes sobre la tasa de crecimiento de la producción del sistema. Así mismo, se propone una extensión de este planteamiento al estudio del crecimiento de otras variables vinculadas con la producción.

Palabras clave: Crecimiento, Modelo input-output, sensibilidad coeficientes, elasticidades.

1. Introducción

Es de sobra conocida la relación entre el valor propio máximo de la matriz de coeficientes técnicos, en el modelo de Leontief, y el grado de eficiencia del sistema productivo que representa. De tal manera que cuanto menor es el valor propio dominante, de la mencionada matriz, tanto más productivo es el sistema. Esto es, mayor la capacidad de generar un excedente que permita el crecimiento y expansión del mismo. Por otro lado, como veremos, existe una clara relación entre dicho valor propio y la tasa de crecimiento del sistema económico.

Conocido lo anterior, no es extraño que a partir del trabajo de Sherman y Morrison (1950), en el que se analizaba la relación entre los coeficientes de la inversa de una matriz y los cambios operados en la matriz original sin necesidad de volver a calcular la inversa, se desarrollarán una serie de trabajos en el marco del análisis input.

Aplicaciones encaminadas a calibrar el efecto de un cambio en los coeficientes técnicos en los elementos de la inversa de Leontief. A partir del trabajo quizás pionero de Evans (1954), han sido muchas las aplicaciones orientadas a la determinación de los "coeficientes importantes" de una matiz tecnológica[1].

En las páginas que siguen proponemos un planteamiento metodológico alternativo, o quizás tendríamos que decir complementario, para el análisis de la sensibilidad de los coeficientes técnicos en el modelo de Leontief, que sirva de base a la determinación de los coeficientes importantes en algún respecto. El método se asienta en la relación entre los coeficientes técnicos en tanto que elementos de una matriz y el valor propio máximo de dicha matriz, considerando la importancia de dicho valor para el crecimiento del sistema. En este sentido, estamos interesados en el papel que juegan los distintos coeficientes, en el marco de la estructura productiva, desde la perspectiva de la expansión de la producción.

Por otro lado, existe una estrecha relación entre los niveles de producción y la dimensión de otras variables vinculadas a la producción a través del entramado productivo. Desde este punto de vista, convendrá ver la trascendencia que tienen las distintas transacciones en el marco del sistema productivo en relación con la probable expansión o contracción del volumen de las mismas.

En la exposición que sigue mostraremos en primer lugar, apartado 2, la relación entre la matriz de coeficientes técnicos y la tasa de crecimiento del sistema en un modelo simple de Leontief. A continuación, apartado 3, se muestra el proceso de cálculo de la matriz de sensibilidad de los coeficientes y su interpretación. Y, en el apartado 4, se propone una extensión del anterior análisis a otras variables distintas de la producción.

---

[1] Una revisión interesante sobre este tema se encuentra en Tarancón Morán, M.A. et al. (2008)

2. Crecimiento equilibrado en un modelo simple de Leontief

Nuestro punto de partida es el bien conocido modelo abierto de Leontief. En el cual se parte de la siguiente expresión:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{y} \tag{0.1}$$

en la que **x** es un vector columna cuyos elementos muestran la producción de los n sectores o ramas productivas que constituyen la economía objeto de análisis. El vector columna **y** expresa el excedente productivo de los n sectores, y que constituyen la demanda final de la economía. **A** es una matriz n x n cuyo elemento característico a_{ij} expresa las unidades de producción del sector i utilizadas en la producción de una unidad del sector j. Es, pues, una matriz que muestra la tecnología del sistema productivo en cuestión. Por tanto, **Ax** es el vector de la producción utilizada como inputs intermedios. Obviamente, la solución del sistema (1.1) si los coeficientes técnicos de la matriz **A** permanecen invariables es entonces:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y} \tag{0.2}$$

donde $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ es la inversa de Leontief.

A partir de la expresión (1.1) es posible diseñar un modelo simple de crecimiento equilibrado y establecer las condiciones en que dicho crecimiento es posible[2].

En la expresión (1.1) el output total se consume, en el mismo período, en forma de inputs intermedios y demandas finales. Sin embargo, como señala Nikaido (1978; 134), "en general, el consumo viene detrás de la producción". Un retraso temporal que hace que la producción se realice en un momento t y el consumo en el momento $t + 1$. Y la expresión (1.1) puede volver a escribirse como sigue:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{Ax}_{t+1} + \mathbf{y}_{t+1} \tag{0.3}$$

Si la economía se expande a una tasa uniforme α entonces,

[2] Para un modelo de crecimiento simple en el marco del análisis input-output se puede ver, entre otros, Nikaido, H. (1978), Takayama, A. (1985); y en un modelo Leontief-Sraffa, Pasinetti, L. (1975)

$$\begin{aligned}(1+\alpha)x_{i,t} &= x_{i,(t+1)}\\ (1+\alpha)y_{i,t} &= y_{i,(t+1)}\end{aligned} \tag{0.4}$$

y podemos escribir:

$$\mathbf{x}_t = (1+\alpha)(\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t) \tag{0.5}$$

De donde, haciendo $\rho = 1/(1+\alpha)$, escribimos:

$$(\rho\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t = \mathbf{y}_t \tag{0.6}$$

que es una relación entre la producción y la demanda dentro del mismo período.

La única condición para que $\mathbf{x_t}$ tenga una solución no negativa para $\mathbf{y}_t > 0$ es que

$$\rho = \frac{1}{1+\alpha} > \lambda_{máx}(A) \tag{0.7}$$

En la expresión anterior $\lambda_{máx}$, es el valor propio máximo de la matriz **A**.

Si hacemos $\mathbf{y} = 0$, podemos escribir:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_{máx}\mathbf{x} \tag{0.8}$$

No es difícil deducir que la tasa máxima de crecimiento del sistema, $\alpha_{\text{máx}}$ vendrá dada por la relación:

$$\alpha_{máx} = \frac{1}{\lambda_{máx}} - 1 \tag{0.9}$$

Existe, pues, una relación inversa entre la tasa máxima de crecimiento del sistema y el radio espectral de la matriz de coeficientes técnicos. Naturalmente, el valor propio máximo de la matriz **A** depende de sus elementos, los coeficientes técnicos. Cualquier pequeña variación en uno de esos coeficientes provocará una variación en general de los valores propios de la matriz y, en particular, de su valor propio máximo, afectando así a la tasa de crecimiento del sistema. El impacto de la variación de un coeficiente sobre el valor propio máximo de **A** y, por tanto, en la tasa de crecimiento máximo de la producción del sistema, dependerá de la posición y del papel que dicho coeficiente juegue en la estructura productiva de dicho sistema[3]. Obviamente, como se señala en Dietzenbacher, E. (1992), existe una correspondencia, teniendo en cuenta el teorema de Perron-Frobenius, entre el valor propio dominante de la matriz y las ligazones hacía delante (*forward linkages*) y hacía atrás (*backward linkages*). Como el mismo autor señala: "un incremento (decrecimiento) en algún elemento a_{ij} de $\mathbf{A}$ induce un aumento (disminución) en el valor propio dominante λ". Lo que tiene una relación evidente con las variaciones que experimentaran los mencionados *linkages*.

Dado que α es la tasa de expansión uniforme del sistema, nuestro problema es: ¿qué importancia tienen cada uno de los coeficientes para el crecimiento? Lo que nos interesa mostrar es la sensibilidad de λ, ante un pequeño cambio de un coeficiente cualquiera de la matriz $\mathbf{A}$. Es decir, podemos realizar un análisis de sensibilidad que nos muestre la importancia de cada coeficiente en relación con el crecimiento del sistema. En el siguiente apartado proponemos una técnica analítica para enfrentar el mencionado análisis de sensibilidad.

3. Crecimiento y cambio en la estructura productiva

En principio consideraremos que nuestro interés se centra en el incremento de la producción. Más adelante veremos que la aplicación puede extenderse a cualquier variable relacionada con la estructura de la producción: empleo, consumo energético, valor añadido, etc.

Sean $\mathbf{q}$ y $\mathbf{z}$, respectivamente, los vectores propios izquierdo y derecho asociados a $\lambda_{máx.}$ Entonces, haciendo $\eta = \lambda_{máx}$, podemos escribir:

$$\mathbf{Az} = \eta\mathbf{z} \tag{1.1}$$

y en relación con el auto-vector izquierdo:

$$\mathbf{q}'\mathbf{A} = \eta\mathbf{q}' \tag{1.2}$$

La diferencial total de (2.1) conduce a

[3] El papel relevante que juega la perturbación de la matriz input-output en la raíz de Perron-Frobenius y el vector de Perron tiene un amplio desarrollo en Dietzenbacher, E. (1988).

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \dot{\eta}\mathbf{z} + \eta\dot{\mathbf{z}} \tag{1.3}$$

Multiplicando ambos miembros de (2.3) por el auto-vector izquierdo **q**, tendríamos:

$$\mathbf{q}'\dot{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{q}'\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}'\dot{\eta}\mathbf{z} + \mathbf{q}'\eta\dot{\mathbf{z}} \tag{1.4}$$

Nótese que los dos segundos términos en ambas partes de la igualdad son iguales, y por tanto,

$$\mathbf{q}'\dot{\mathbf{A}}\mathbf{z} = \mathbf{q}'\dot{\eta}\mathbf{z} \tag{1.5}$$

De donde,

$$\dot{\eta} = \frac{\mathbf{q}'\dot{\mathbf{A}}\mathbf{z}}{\mathbf{q}'\mathbf{z}} \tag{1.6}$$

La expresión (2.6) nos proporciona la variación experimentada por el valor propio dominante y la tasa de crecimiento atendiendo a la expresión (1.9), ante una variación de los coeficientes técnicos. Así pues, disponemos, por la relación (1.9), de una medida de la importancia de cada coeficiente atendiendo a la magnitud de su impacto sobre el crecimiento del sistema.

Evidentemente, si sólo un coeficiente técnico varia, la sensibilidad de un coeficiente s_{ij} no es sino la derivada parcial de $\lambda_{máx}$ respecto a a_{ij}. Esto es,

$$s_{ij} = \frac{\partial \eta}{\partial a_{ij}} = \frac{q_i z_j}{\mathbf{q}'\mathbf{z}} \tag{1.7}$$

La obtención, ahora, de la matriz de sensibilidad es una tarea sencilla:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mathbf{q}'\mathbf{z}}\mathbf{q}\mathbf{z}' \tag{1.8}$$

La matriz **S** ha sido con frecuencia utilizada en Biología en el análisis de poblaciones[4].

[4] A este respecto puede verse, Caswell, H. (2001) y Caswell, H., Trevisan, M.C., (1994), entre otros muchos trabajos.

La matriz de sensibilidad presenta, no obstante, el problema de la no estandarización de sus elementos, lo cual plantea el problema de la comparabilidad. En efecto, desde una perspectiva comparada, en términos absolutos los resultados pueden inducir a una valoración errónea de la importancia de los distintos coeficientes s_{ij}. El problema es de fácil solución, para ello basta convertir la matriz de sensibilidad en una matriz de elasticidades. La elasticidad nos mediría, como es bien sabido, el cambio proporcional experimentado por $\lambda_{\max}$ frente a un cambio proporcional de un coeficiente cualquiera. Esto es

$$\varepsilon_{ij} = \frac{a_{ij}}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial a_{ij}} \tag{1.9}$$

El cálculo de la matriz de elasticidades es ahora inmediato:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\eta}\mathbf{S} \circ \mathbf{A} \tag{1.10}$$

en la que $\circ$ expresa el producto de Hadamard.

Es evidente que una propiedad relevante de la matriz de elasticidades es que la suma de las mismas es igual a uno.

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij} = 1 \tag{1.11}$$

El análisis propuesto puede extenderse a la investigación de la relación existente entre la estructura productiva y otras variables distintas a la producción pero en estrecha relación con la mencionada estructura. Tal es el caso del empleo, la contaminación, la renta, etc. Abordaremos esta cuestión en el apartado siguiente.

4. Extensión del análisis

Sea f_i la cantidad de empleo, energía, valor añadido, contaminación, etc.… necesaria o generada por unidad de producción del sector i. Y llamemos **f** al vector columna (*n x 1*), suponiendo que la economía se compone de n sectores productivos, cuyo elemento característico es f_i. Podemos operar entonces la siguiente transformación de semejanza:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{f}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{f}}^{-1} \tag{3.1}$$

^ muestra la expresión de un vector como matriz diagonal.

El elemento característico f_{ij} de la matriz **F** expresa ahora, pongamos por caso, la cantidad de energía consumida por el sector *i* por cada unidad de energía consumida por el sector *j* en el proceso de obtención de una unidad de producto. Lo mismo interpretaríamos en caso del empleo u otra variable cualquiera vinculada a la producción de *j*.

Es bien sabido que las matrices **A** y **F** son semejantes y, por tanto, sus valores propios son iguales. Esto es $\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{F}) = \eta$.

Si llamamos $q^{f}\,'$ y z^{f} a los auto-vectores asociados al auto-valor máximo en el caso de la matriz **F**, tendríamos:

$$\mathbf{S}^{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}^{f}\mathbf{'z}^{f}}\mathbf{q}^{f}\mathbf{z}^{f}\mathbf{'} \qquad (3.2)$$

Esta nueva matriz de sensibilidad nos proporciona el grado de importancia de cada coeficiente de la estructura de la producción respecto de la variable *f*.

Podemos obtener la nueva matriz de elasticidades sin más que escribir

$$\mathbf{E}^{f} = \frac{1}{\eta}\mathbf{S}^{f} \circ \mathbf{F} = \frac{1}{\eta}\mathbf{S}^{f} \circ \hat{\mathbf{f}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{f}}^{-1} \qquad (3.3)$$

5. Conclusiones

En las páginas anteriores hemos obtenido una valoración o importancia de los coeficientes técnicos de una matriz input-output en relación con la producción de bienes y servicios de un determinado sistema económico. Desde un punto de vista alternativo, o si se quiere complementario, hemos planteado una medida que determina la importancia de los coeficientes tecnológicos con independencia de la estructura de la demanda final en un momento dado. Valoración que vincula el auto-valor máximo o dominante de la matriz de coeficientes técnicos, en el supuesto de una senda de crecimiento estable de la economía, con la tasa de crecimiento del sistema económico en cuestión.

Utilizando las propiedades de las matrices semejantes hemos extendido el análisis a otras variables como pueden ser, el empleo, el consumo de electricidad, la contaminación, la renta y un largo etcétera.

Pensamos que la propuesta no es un ejercicio baladí y creemos que permite servir de base a desarrollos más sofisticados.

Referencias bibliográficas

Caswell, H. (2001): *Matrix Population Models*, 2nd Ed. Sinauer Associates, Sunderland, MA.

Caswell, H., Trevisan, M.C., (1994): "The sensitivity analysis of periodic matrix models", Ecology 75, 1299–1303.

Dietzenbacher, E. (1992): “The measurement of interindustry linkages”, *Economic Modelling*, October: 419-437

Dietzenbacher, E. (1988): "Perturbations of Matrices: A Theorem on the Perron Vector and its Applications to Input-Output Models, *Journal of Economics*", 4: 389-412

Evans, W.D. (1954): “The effect of structural matrix errors on interindustry relation estimates”, *Econometrica*, 22: 461-480.

Nikaido, H. (1978): *Métodos matemáticos del análisis económico moderno*, Editorial Vicens-Vives, Barcelona (España)

Pasinetti, L. (1975): *Lezioni di teoria delle produzione*. Società editrice il Mulino, Bologna.

Sherman, J.; Morrison, W.J. (1950): “Adjustment of an inverse matrix corresponding to change in one element of a given matrix”, *Annals of Mathematical Statistics*,21: 124-127.

Takayama A, (1985): *Mathematical economics*, Cambridge University Press, UK.

Tarancón Morán, M. A., Callejas Albiñana, F., Dietzenbacher, E.; Lahr, M. L. (2008): “A Revision of the Tolerable Limits Approach: Searching for the Important Coefficients”. *Economic Systems Research*, 20 (1).

Últims documents de treball publicats

NUM	TÍTOL	AUTOR	DATA
11.08	Crecimiento economico y estructura productiva en un modelo Input-Output: Un analisis alternativo de sensibilidad de los coeficientes.	Vicent Alcántara	Juny 2011
11.07	EXPLANATORY FACTORS OF CO2 PER CAPITA EMISSION INEQUALITY IN THE EUROPEAN UNION	Emilio Padilla, Juan Antonio Duro	Maig 2011
11.06	Cross-country polarisation in CO2 emissions per capita in the European Union: changes and explanatory factors	Juan Antonio Duro, Emilio Padilla	Maig 2011
11.05	Economic Growth and Inequality: The Role of Fiscal Policies	Leonel Muinelo, Oriol Roca-Sagalés	Febrer 2011
11.04	Homogeneización en un Sistema de tipo Leontief (o Leontief-Sraffa).	Xose Luis Quiñoa, Laia Pié Dols	Febrer 2011
11.03	Ciudades que contribuyen a la Sostenibilidad Global	Ivan Muñiz Olivera, Roser Masjuan, Pau Morera, Miguel-Angel Garcia Lopez	Febrer 2011
11.02	Medición del poder de mercado en la industria del cobre de Estados Unidos: Una aproximación desde la perspectiva de la Nueva Organización Industrial	Andrés E. Luengo	Febrer 2011
11.01	Monetary Policy Rules and Financial Stress: Does Financial Instability Matter for Monetary Policy?	Jaromír Baxa, Roman Horváth, Borek Vašícek	Gener 2011
10.10	Is Monetary Policy in New Members States Asymmetric?	Borek Vasicek	Desembre 2010
10.09	CO2 emissions and economic activity: heterogeneity across countries and non stationary series	Matías Piaggio, Emilio Padilla	Desembre 2010
10.08	Inequality across countries in energy intensities: an analysis of the role of energy transformation and final energy consumption	Juan Antonio Duro, Emilio Padilla	Desembre 2010
10.07	How Does Monetary Policy Change? Evidence on Inflation Targeting Countries	Jaromír Baxa, Roman Horváth, Borek Vasícek	Setembre 2010
10.06	The Wage-Productivity Gap Revisited: Is the Labour Share Neutral to Employment?	Marika Karanassou, Hector Sala	Juliol 2010
10.05	Oil price shocks and labor market fluctuations	Javier Ordoñez, Hector Sala, Jose I. Silva	Juliol 2010
10.04	Vulnerability to Poverty: A Microeconometric Approach and Application to the Republic of Haiti	Evans Jadotte	Juliol 2010